

「曲がって見える水の中」 – スネルの法則を考える –

2021/06/05 ソフィー

光は電磁波（電波）です。無線通信等で使われている電磁波よりも周波数が高いことが特徴です。ですから光は、電気・電子応用の対象なのですが、高周波とは縁が薄い Audio・パワエレなどを扱っている技術者の多くの方から見ると、光と電気は別物に見えるようです。そこでもっと光に親しんで頂くために、身近な光の物理現象を電気・電子技術者の目線で考えてみました。本稿では、光の屈折を考えてみました。

1. 曲がって見える水の中

真っすぐな攪拌棒、図 1(A)を洗面器に張った水につけると図 1(B)の様に曲がって見えます。これはご存じのように光が大気と水の境界で屈折するためです。



(A)水につける前 棒は真っすぐ。 (B)水につけた時 曲がって見える！

図1 真っすぐな棒を水につけると・・・。

この時の光の Path を図 2 に示しました。水がない場合には青色矢印の方向から見える景色が、水があると空気との境界で光が屈折するために、赤矢印の方向から見えるようになります。このために真っすぐな棒が曲がっているように見える訳です。

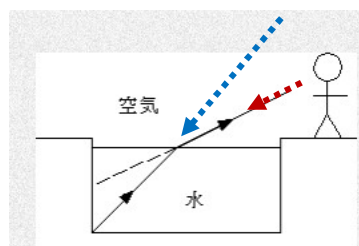


図2 曲がって見える理由³⁾

2. 境界で光はどう曲がるか。(スネルの法則)

光が曲がるのは、伝搬媒質の屈折率が異なるためです。これは、光学の初歩で**スネルの法則** (Snell's law) ¹⁾ として学びます。スネルの法則は、波動が等方性の媒質から他の等方性の媒質に入射して屈折する場合、入射角を θ_1 、出射角(屈折角)を θ_2 、伝搬媒質の屈折率をそれぞれ n_1 、 n_2 とすると $n_1 \times \sin\theta_1 = n_2 \times \sin\theta_2$ の関係になるというものです。

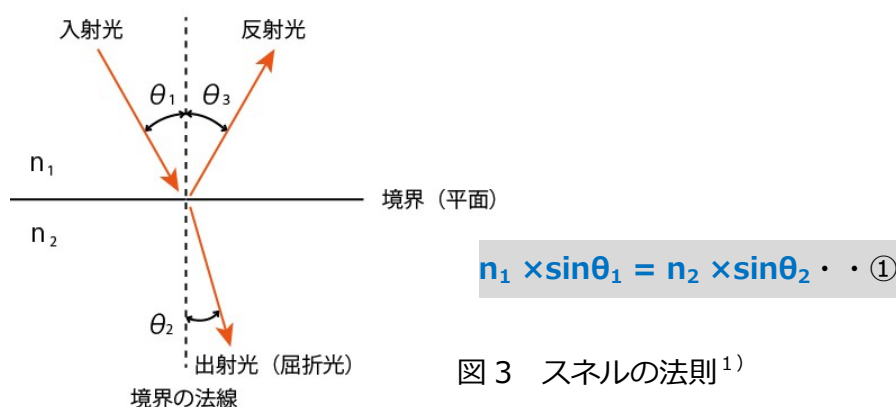


図3 スネルの法則¹⁾

スネルの法則は何故成立するのかを次章から考えてみました。

3. スネルの法則をフェルマーの原理から導く。

スネルの法則をフェルマーの原理から導く方法を紹介します。**フェルマーの原理**とは、「2点を通る光は、可能な経路のうち最短時間となる経路を伝搬する。」という法則です。光が自身で考えて経路を選ぶとは思えませんので、神様に与えられた自然界の法則は不可思議です。

フェルマーの原理を表す図4²⁾において2点A、Bを結ぶ経路は、(b)の様にさまざまです。領域1、2の屈折率をそれぞれ n_1 、 n_2 とすると、各領域での光の伝搬速度は c/n_1 、 c/n_2 となります。例えば領域1を空気(屈折率1.0003)、領域2を水(屈折率1.3330)と考えると領域1の伝搬速度は領域2の約1.3倍となります。この条件では、図4(b)のA→Q→B経路は、A→P→BやA→R→Bよりも伝搬時間が短くなります。このように、最短時間となる条件を探す方法でスネルの法則を導きます。

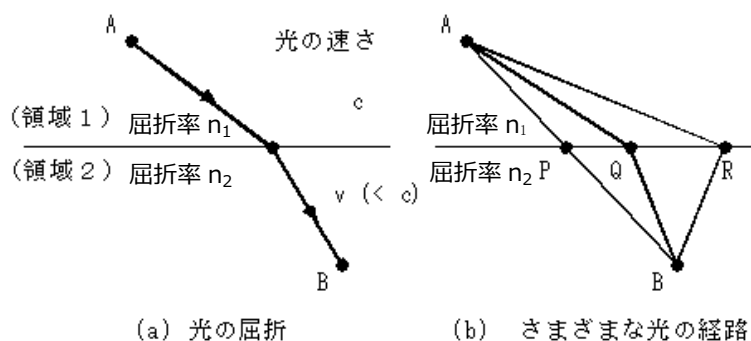
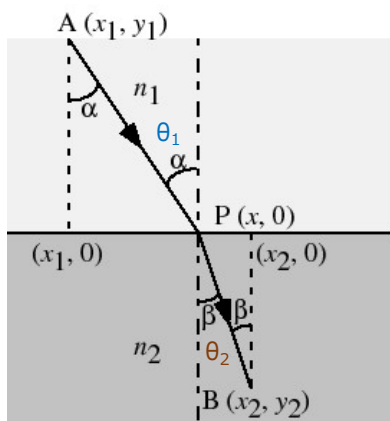


図4 フェルマーの原理³⁾

光の伝搬経路を図 5 の座標²⁾ に表しました。図より A→B の 2 点間の光学長は②式となります。光学長とは、物理的長さに屈折率を掛けたもので、光が伝搬する時間長の概念です。光学長が最短となる経路を知るために②式を x で微分すると③式となります。③式が成り立つ条件がスネルの法則である①式となります。^{2),3)}



$$L = n_1 \sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2} + n_2 \sqrt{(x - x_2)^2 + y_2^2} \quad \text{②}$$

$$\frac{dL}{dx} = \frac{n_1(x - x_1)}{\sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2}} + \frac{n_2(x - x_2)}{\sqrt{(x - x_2)^2 + y_2^2}} = 0 \quad \text{③}$$

$$\sin \theta_1 \quad \sin \theta_2$$

$$n_1 \times \sin \theta_1 - n_2 \times \sin \theta_2 = 0$$

$$n_1 \times \sin \theta_1 = n_2 \times \sin \theta_2 \quad \leftarrow \text{スネルの法則} \quad \text{①式}$$

図 5 光学長の計算²⁾

4. スネルの法則を四輪車理論で考えてみた。

前章ではスネルの法則をフェルマーの原理から導きましたが、光が自身で考えて Path を探すとは思えませんので自分にはピンときません。専門書では電場・磁場の連続性を表す境界条件から導く方式で説明がされていますが、数式が並んでおり、直感的な解釈として筆者には???! です。

そこで巷で使われている、光を四輪車に喩える理論で考えてみました。この理論は光を四輪車とし、屈折率を走っている道路の走り易さと考えます。例えば屈折率 1 の真空中が最も走り易く、屈折率 1.3 の水中は走りにくいと考えます。繰り返しになりますが、
光の伝搬速度 = 真空中の光速 / 屈折率 です。

図 6 の様に考えると、境界で入射光である 4 輪車は運転者から見て右側の車輪が先にブレーキがかかり、四輪車は進行方向に対して面舵となります。

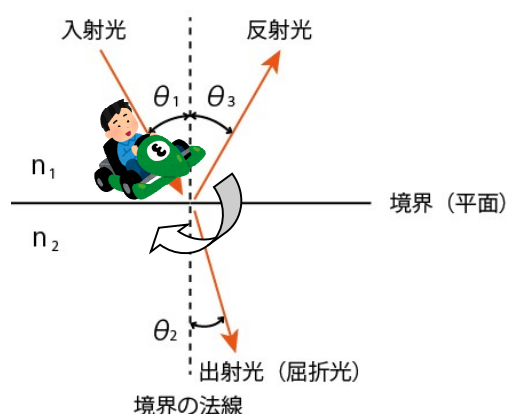


図 6 スネルの法則を 4 輪車理論で考える。

四輪車理論は直感的で分かり易いですが、定量的な扱いができないので悩んでいたところ、光の戦士-友人 T 氏からホイヘンスの原理⁴⁾を使うと簡単に説明できるとアドバイスを頂きました。ホイヘンスの原理⁴⁾とは、「進んでいる光の先端波面は、少し前の瞬間の波面の各点から発した球面波の合成となる」というものです。これは、光だけでなくすべての波動に共通する現象です。

図 7 にホイヘンスの原理に従って、ある時間 t の間に光が進んでいく様子を幾何学的に表しました⁴⁾。A B、A'B'はそれぞれ伝搬している光の先端波面を表します。媒質 2 では、光の進む速度が媒質 1 の n_1/n_2 倍となりますので、A A'は、B B'の n_1/n_2 倍です。

図より、屈折率と曲がり角の関係を求めると

$\theta_1 = \angle BAB'$ 、 $\theta_2 = \angle AB'A'$ です。

AB 辺が共通なので、これより

$AB \sin \theta_1 = BB'$

$AB \sin \theta_2 = AA'$

更に伝搬速度差により

$AA' = n_1/n_2 \times BB'$ となります。

上記関係式をいじくとスネルの法則①式が導かれます。

$n_1 \times \sin \theta_1 = n_2 \times \sin \theta_2 \cdots \textcircled{1}$

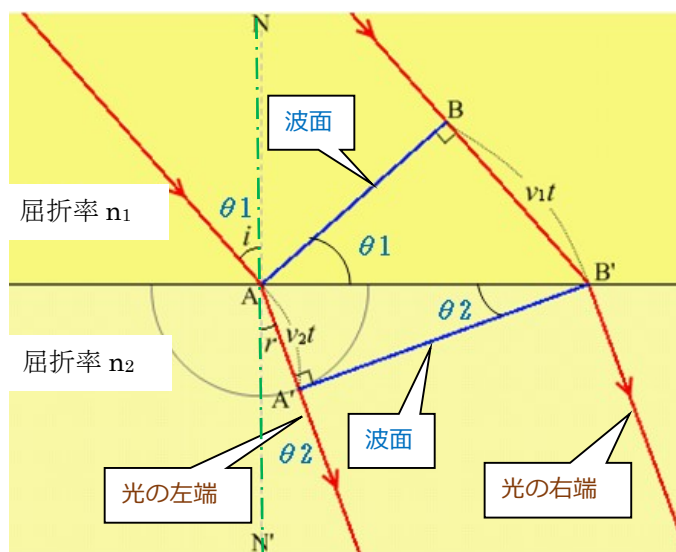


図 7 ホイヘンスの原理

これだと随分すっきりしました。納得です！ 無線通信で、電波が対流圏において大地に向かって湾曲して伝わることも、これで腑に落ちました。

5. 屈折率とは何もの？

これまでに多く出てきました屈折率を改めて考えてみました。目的は光学定数である屈折率を電気・電子の言葉で表すことです。

屈折率を調べるとその本質は「その媒質の光との相互作用の強さ」です。相互作用を起こす物質がない真空の屈折率は最小値の 1 です。これを基準として考えると、水分子は電荷を持ち、電磁波である光と相互に作用が生じるので、水の屈折率は真空よりも大きい約 1.3 です。

相互作用の強さは、その媒質を伝搬する光の速さとして表れます。水中では光が水分子に引っ張られて前に進みにくいので、速度は真空中の約 $1/1.3$ 倍に遅くなります。

この考え方から屈折率は「真空中の光速度を物質中の光速度で割った値がその物質の屈折率」と定義されます⁵⁾。

光が媒質を伝搬する速さ（位相速度） v は、下式④⁵⁾で表されます。

$$v = 1 / \sqrt{(\mu * \epsilon)} \quad \dots ④$$

これより、屈折率 n を式で表すと

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}} \quad \dots ⑤$$

ここで μ 、 ϵ は材質の透磁率、誘電率

μ_0 、 ϵ_0 は真空の透磁率、誘電率

やっと透磁率、誘電率という電気・電子の言葉が出てきました。

ちなみに真空中の光速は下の値となります。これは一秒間に地球を7周半する速さです。

$$\text{真空中の光速 } c = 1 / \sqrt{(\mu_0 * \epsilon_0)}$$

$$= 1 / \sqrt{(1.26\text{E-}6 * 8.85\text{E-}12)} = 2.99\text{E}8 [\text{m/s}]$$

$$\mu_0 \text{ は真空の透磁率、} 1.26\text{E-}6 [\text{H/m}] \quad \epsilon_0 \text{ は誘電率 } 8.85\text{E-}12 [\text{F/m}]$$

6. 光の伝搬と伝送線路を伝わる電気信号は同じ物理現象。

ここで電気・電子技術者なら学んだことが有る伝送線路を考えます。単位長さあたりのインダクタンスが L 、キャパシタンスが C の伝送線路の信号伝搬速度 V は、⑥式で表されます。

$$V = 1 / \sqrt{(L * C)} \quad \dots ⑥ \quad [\text{m/s}]^{6)}$$

これより、 L や C が大きいほど伝搬速度が遅くなることが分かります。 L や C は「伝わる信号とその線路との相互作用の強さ」で屈折率と同じ概念です。

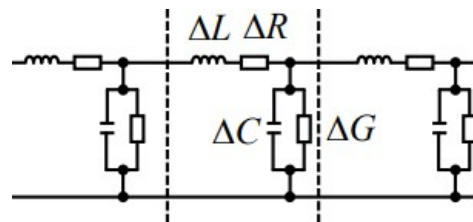


図8 伝送線路⁶⁾

身近な伝送線路である同軸ケーブルは、信号線（D）とシールド線（B）をポリエチレン（C）で絶縁した構造です。同軸ケーブルを伝わる信号の速度 V は、⑦式で計算されます。

$$V = 1 / \sqrt{(L * C)} = 1 / \sqrt{(\mu * \epsilon)} = 1 / \sqrt{(\mu_0 * \epsilon_0 * \epsilon_r)} \quad \dots ⑦ \quad [\text{m/s}]$$

$$= (1.26\text{E-}6 * 8.85\text{E-}12 * 2.35)$$

$$= 1.95\text{E}8 [\text{m/s}]$$

μ 、 ϵ : C部材質の透磁率、誘電率

ϵ_r : ポリエチレンの誘電率 2.35

これより、同軸線路による信号のDelayが、1メートルあたり約5nsであることが分かります。よく使う数値です。

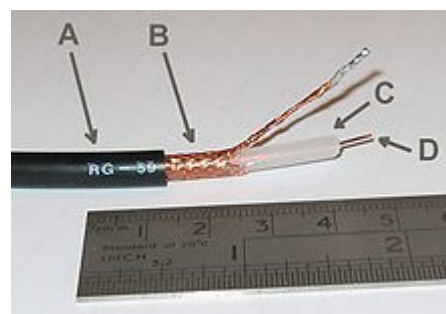
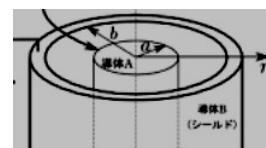


図9 同軸線⁷⁾

⑦式ではLとCが μ と ϵ に代わっています。この変換は同軸ケーブルのLとCが、⑧式、⑨式で表されることから導かれます。

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\epsilon}{\log \frac{b}{a}} \quad \dots \textcircled{8} \quad L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu}{2\pi} \log \frac{b}{a} \quad \dots \textcircled{9}$$



(a は内導体の半径、b は外導体の半径、 μ と ϵ は絶縁部材質の透磁率、誘電率)

⑦式はポリエチレンの比誘電率 ϵ_r の項が加わっていますが、透磁率・誘電率を用いて光が媒質を伝搬する速さを示す式そのものです。つまり、光の伝搬と伝送線路を伝わる電気信号は同じ物理現象です。

7. まとめ

光がなぜ曲がるのかを考えたところ、電磁波 (= 光) の伝搬速度は媒質によって異なるためと説明できました。光の振る舞いは電磁波の理論で説明できますので、屈折率などの光学用語は怖くありません。

また物理現象の解析方法は、見方を変えると複数あることも経験できました。正解は複数あって、どれでも良いんですね！

引用文献

- 1) ウシオ電機 HP スネルの法則
https://www.ushio.co.jp/jp/technology/glossary/glossary_sa/snells_law.html
- 2) フェルマーの原理と幾何光学
<https://www.px.tsukuba.ac.jp/~onoda/butsurib1/node72.html>
- 3) 光学における最小化問題 (変分原理) genko1.html (osaka-cu.ac.jp)
- 4) ホイヘンスの原理 <https://wakariyasui.sakura.ne.jp/p/wave/gennri/hoihennsu.html>
- 5) 屈折率 『ウィキペディア (Wikipedia)』
<https://ja.wikipedia.org/wiki/%E5%B1%88%E6%8A%98%E7%8E%87>
- 6) 分布定数回路と伝送線路
https://www2-kawakami.ct.osakafu-u.ac.jp/osakafu-content/uploads/sites/407/Lecture_Data/Electric_Circuit_II/01_Lecture/09_lecture_electric_circuit_II.pdf
- 7) 同軸ケーブル - Wikipedia
<https://ja.wikipedia.org/wiki/%E5%90%8C%E8%BB%B8%E3%82%B1%E3%83%BC%E3%83%96%E3%83%AB>
- 8) 伝送線路 - TOKYO TECH OCW - 東京工業大学
www.ocw.titech.ac.jp/index.php?module...file...

(以上)